## 9.3.3 Charakteristiky polohy

**Předpoklady:** 9303

**Všechny hodnoty budeme v této a v dalších hodinách zaokrouhlovat na tři platné číslice.**

Tabulka četností (například známek z matematiky) obsahuje kompletní statistickou informaci, ale pro rychlou orientaci je údajů příliš mnoho $\Rightarrow$ hledáme jedno číslo, které nám rychle řekne, jaká je typická hodnota $\Rightarrow$ **aritmetický průměr**.

Aritmetický průměr $\overline{x}$ je nejčastěji užívanou charakteristikou polohy a je dán vzorcem: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Součet zjištěných hodnot znaku všech jednotek vydělíme počtem všech jednotek.

**Př. 1:** Při výzkumu byly zjištěny tyto známky z fyziky: 3, 2, 1, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 1. Urči průměr známek z fyziky.

Dosadíme do vzorce:

$$\overline{x} = \frac{3+2+1+3+2+2+3+3+3+4+3+3+3+3+3+3+2+3+1}{19} \doteq 2,63.$$

V případě většího počtu čísel se výpočet protahuje. Pro usnadnění můžeme využít tabulku četností.

**Př. 2:** Vypočti aritmetický průměr známek z matematiky. Výpočet si usnadni pomocí tabulky četností sestavené v minulé hodině. Sestav vzorec pro výpočet aritmetického průměru použitím četností jednotlivých hodnot.

Tabulka četností známek z matematiky:

| známka $x_j^*$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| četnost $n_j$ | 1 | 5 | 10 | 3 | 0 |

Při výpočtu průměru vynásobíme každou hodnotu její četností:

$$\overline{x} = \frac{1\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot 10+4\cdot 3+5\cdot 0}{19} \doteq 2,79.$$

Vzorec: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} x_j^* n_j$.

Tabulka četností výšek v intervalech:

| $x_j^*$ | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | 185 | 190 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 1 | 4 | 6 | 4 | 2 | 1 |

**Př. 3:** Vypočti pomocí tabulky četností průměrnou výšku osoby.

Při výpočtu průměru vynásobíme každou hodnotu její četností:

$$\overline{x} = \frac{160 \cdot 1 + 165 \cdot 1 + 170 \cdot 4 + 175 \cdot 6 + 180 \cdot 4 + 185 \cdot 2 + 190 \cdot 1}{19} \doteq 175,5$$

Výsledek se přesně neshoduje s průměrem, který spočítáme z původních nezaokrouhlených hodnot ( $\overline{x} = 175,2$ ), což je způsobeno zaokrouhlováním při přiřazování do intervalů.

I když předchozí výpočet nebyl příliš zdlouhavý, je možné jeho výpočet ještě zjednodušit.

Do kalkulačky jsme zadávali poměrně velká čísla, všechna větší nebo rovna 160 $\Rightarrow$ můžeme všechny hodnoty v tabulce zmenšit o 160, určit z nich průměr a získanou hodnotu opět zvětšit o 160. Měli bychom tak získat stejný výsledek.

**Př. 4:** Sestav tabulku četností upravených výšek (zmenšených o 160), vypočti průměr z upravených hodnot a převeď ho zpět na původní výšku.

| $x_j^*$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 1 | 4 | 6 | 4 | 2 | 1 |

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 25 \cdot 2 + 30 \cdot 1}{19} \doteq 15,5$$

Původní průměr: $15,5 + 160 = 175,5$.

Tabulku získanou v předchozím kroku můžeme ještě dále zjednodušit. Všechny hodnoty jsou násobky pěti $\Rightarrow$ můžeme všechny hodnoty ještě vydělit pěti.

**Př. 5:** Sestav tabulku četností upravených výšek (zmenšených o 160 a vydělených 5), vypočti průměr z upravených hodnot a převeď ho zpět na původní výšku.

| $x_j^*$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 1 | 4 | 6 | 4 | 2 | 1 |

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{19} \doteq 3,11$$

Původní průměr: $5 \cdot 3,11 + 160 = 175,5$.

Výpočet průměrné hodnoty, který využívá předchozí úpravy, je popsán větou:
**Jsou-li hodnoty znaků *x* a *u* vázány vztahem $x = a + bu$, kde *a*, *b* jsou konstanty, pak tentýž vztah platí i pro průměry: $\overline{x} = a + b\overline{u}$.**

Konstanty *a*, *b* volíme v typickém příkladě takto:

- $a$ je nejnižší hodnota (v našem případě $a = 160$),
- $b$ je šířka intervalů (v našem případě $b = 5$).

Získáme tak nejjednodušší první řádek tabulky (po jedné rostoucí celá čísla začínající nulou).

Aritmetický průměr je sice nejčastěji používanou, ale ne vždy nejlépe vypovídající charakteristikou polohy.

**Př. 6:** Spočítej libovolnou metodou průměrný měsíční příjem všech účastníků výzkumu.

Průměr ze zjištěných hodnot vydělených 100.

$$\overline{u} = \frac{7+13+5+8+10+8+10+4+4+4+20+10+10+6+12+5+15+14+200}{19} \doteq 19,21$$

$$\overline{x} = 100 \cdot \overline{u} = 1921$$

Průměrný čistý měsíční příjem účastníků výzkumu je vyšší než měsíční příjem 17 účastníků výzkumu.
Jak je to možné?
Mezi účastníky výzkumu byl jeden, jehož příjem značně přesahuje příjmy ostatních (je desetkrát větší) $\Rightarrow$ jeho příjem podstatně zvětšil velikost součtu a tím i průměrnou hodnotu.

**Př. 7:** Spočítej libovolnou metodou průměrný měsíční příjem účastníků výzkumu, jejichž příjem nepřesahuje 10000 Kč.

Průměr ze zjištěných hodnot vydělených 100:

$$\overline{u} = \frac{7+13+5+8+10+8+10+4+4+4+20+10+10+6+12+5+15+14}{18} \doteq 9,17$$

$$\overline{x} = 100 \cdot \overline{u} = 917$$

Nový průměr je ani ne poloviční a rozhodně lépe charakterizuje rozložení příjmů mezi účastníky výzkumu.

Předchozí situace dobře ilustruje (v trochu přehnané formě) problémy s jedním z nejčastěji zmiňovaných statistických údajů – průměrnou měsíční mzdou. V součtu, ze kterého tento průměr počítáme, se nachází poměrně malá část zaměstnanců s extrémně vysokými příjmy, které podobným způsobem zvedají součet a tím i průměrnou mzdu. Zcela zákonitě má většina zaměstnanců příjem nižší než průměrný. Nejde tedy o žádnou chybu ve výpočtu, ale pouze o důsledek vysokých příjmů špičkových zaměstnanců a špatně zvolené statistické charakteristiky (vzhledem k slabému matematickému vzdělání většiny populace by však jiný údaj nebyl tak snadno srozumitelný).

V takových situacích je možné používat jinou charakteristiku polohy.

**Modus znaku *x* (značí se $\mathrm{Mod}(x)$) je hodnota *x* s největší četností.**

**Př. 8:** Urči modus:
a) známek z matematiky, b) výšky, c) čistého měsíčního příjmu.

Hodnoty určíme ihned z tabulek četností.

a) známky z matematiky

| $x_j^*$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 5 | 10 | 3 | 0 |

$\mathrm{Mod}(x) = 3$

b) výška

| $x_j^*$ | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | 185 | 190 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 1 | 4 | 6 | 4 | 2 | 1 |

$\mathrm{Mod}(x) = 175$

c) čistý měsíční příjem

| $x_j^*$ | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 1000 | 1200 | 1300 | 1400 | 1500 | 2000 | 20000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\mathrm{Mod}(x) = 1000$

V bodě c) stačilo, aby jednomu ze studentů snížili kapesné na 400 Kč a jednomu ze studentů, kteří berou 1000 Kč, rodiče kapesné zvýšili a Modus by se rovnal 400 Kč (nejnižší uváděné hodnotě). V některých případech ani Modus nevypovídá dobře o situaci.

**Medián znaku *x* (značí se $\mathrm{Med}(x)$) je prostřední hodnota znaku, jsou-li hodnoty $x_1, x_2, ..., x_n$ uspořádány podle velikosti.**

**Př. 9:** Urči medián čistého měsíčního příjmu.

Prostřední hodnota z 19 hodnot = desátá hodnota.

| $x_j^*$ | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 1000 | 1200 | 1300 | 1400 | 1500 | 2000 | 20000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\mathrm{Med}(x) = 1000$

Pokud je počet hodnot sudý, počítáme medián jako průměr ze dvou prostředních hodnot.

**Př. 10:** Urči medián čistého měsíčního příjmu, pokud z hodnot vypustíme nejvyšší hodnotu.

Upravená tabulka četností

| $x_j^*$ | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 1000 | 1200 | 1300 | 1400 | 1500 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$\mathrm{Med}(x) = \frac{800 + 1000}{2} = 900$$

**Dodatek:** Účastníkem výzkumu s čistým příjmem 20000 Kč měsíčně byl učitel – autor učebnice. Bohužel tato částka nebyla mým učitelským platem, protože kromě učení jsem vykonával na škole ještě i funkci správce počítačové sítě a odstraňovatele počítačových problémů (veškeré služby pro 650 uživatelů, 100 počítačů, firmy zajišťovaly pouze konfiguraci internetového připojení), která můj hrubý měsíční příjem zvyšovala přibližně o 7000 Kč.

**Př. 11:** Petáková:
strana 175/cvičení 66

**Shrnutí:** Charakteristiky polohy vyjadřují typickou velikost znaku.